

# Halin 图谱半径的新上界及极图

袁劲松, 束金龙

华东师范大学数学系

- ◇ 1 引言及记号
- ◇ 2 已有相关结论
- ◇ 3 主要结论
- ◇ 4 引理及证明思路

# 一、引言及记号

- $G = (V, E)$  是  $n$  阶简单连通图.
- $A$  是图  $G$  的邻接矩阵.
- $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  是  $A$  的特征值

$\rho(G) = \lambda_1(G)$ :  $G$  谱半径.

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是  $\rho$  所对应的特征向量,

称  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是图  $G$  的Perron 向量.

- $P(G, x)$  表示图  $G$  的特征多项式,

$$P(G, x) = |xI - A|.$$

● Halin 图是将树  $T$  的一度点顺次相连成一个圈所得到的图, 其中  $T$  为一个不含 2 度点的树, 因而 Halin 图是一个 3-连通的平面图, 其阶数  $n \geq 4$ . 其中圈上的点称为 Halin 图的外点, 其余的点为 Halin 图的内点.

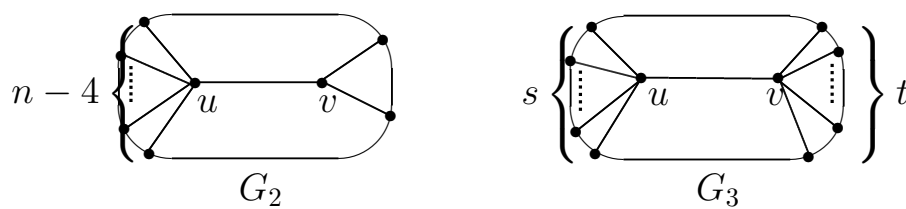
## 二、已有相关结论

束金龙, 洪渊, 外平面图和 Halin 图谱半径的上界, 数学年刊 21A:6(2000)77-82

- $n$  阶 Halin 图的谱半径  $\rho(G) \leq 1 + \sqrt{n}$ , 达到此上界的极图为  $K_1 \nabla C_{n-1}$
- 设  $G$  是内点数为  $a$  ( $a \geq 1$ ) 的 Halin 图, 则有  $\rho(G) \leq 1 + \sqrt{n - 2a + 2}$ .

### 三、主要结论

- 设  $G$  是内点数至少为 2 的  $n$  阶 Halin 图, 则有  $\rho(G) \leq \rho(G_2) < 1 + \sqrt{n-2}$ .



## 四、引理及证明思路

•引理1. 设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是连通图  $G$  的 Perron 向量, 其中  $x_i$  对应于点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $x_i = \sqrt{\frac{P(G - v_i, \rho)}{P'(G, \rho)}}$ .

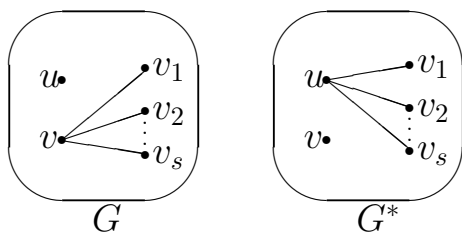
•引理2.  $G$  为连通图,  $G'$  为  $G$  的真生成子图, 则有  $\lambda_1(G) > \lambda_1(G')$ , 当  $\lambda \geq \lambda_1(G)$  时, 有  $P(G; \lambda) < P(G'; \lambda)$ .

•引理3. 设  $A$  是简单连通图  $G$  的邻接矩阵,  $S_i$  表示  $A$  的第  $i$  行行和,  $f(x)$  是  $x$  的多项式,  $\lambda$  为  $A$  的最大特征值, 则

$$\min_{1 \leq i \leq n} S_i(f(A)) \leq f(\lambda) \leq \max_{1 \leq i \leq n} S_i(f(A)).$$

•引理4. 设  $A$  是非负不可约对称矩阵,  $x \in \mathbb{R}^n$  且  $x$  为单位向量, 如果  $\rho(A) = x^T Ax$ , 那么  $Ax = \rho(A)x$ .

●引理5. 设  $u, v$  是连通图  $G$  的任意两个顶点,  $s$  是某一正整数, 若  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subseteq N_{G(v)} \setminus N_{G(u)} \neq \emptyset$ , 令  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为  $G$  的 Perron 向量, 其中  $x_i$  对应于点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 将  $G$  中的边  $vv_i$  替换为边  $uv_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) 得到图  $G^*$ , 若  $x_u \geq x_v$ , 则  $\rho(G^*) > \rho(G)$ .



## 第一步: 内点数 $a \geq 4$

由引理3 估计出  $\rho(G_2) > 1 + \sqrt{n-5}$ .

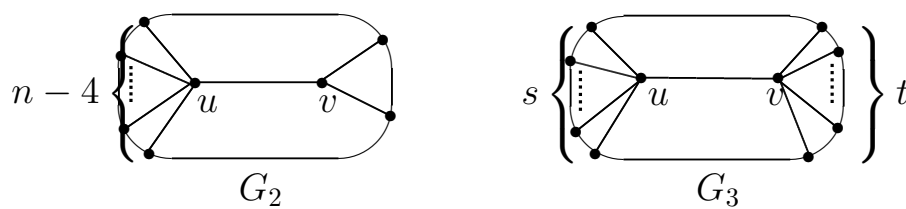
同时利用我们原来的结论估计得内点数  $a \geq 4$ 时,  
 $\rho(G) \leq 1 + \sqrt{n-6}$ .

所以当  $a \geq 4$ 时,

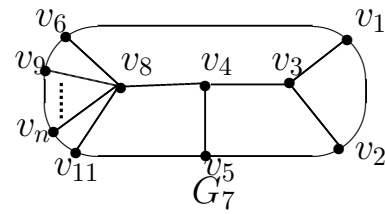
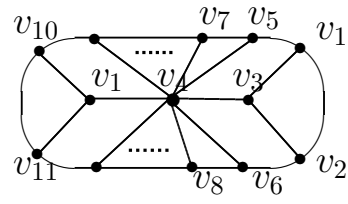
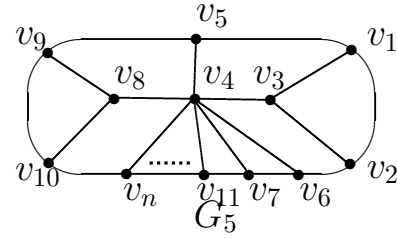
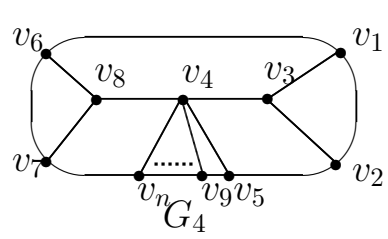
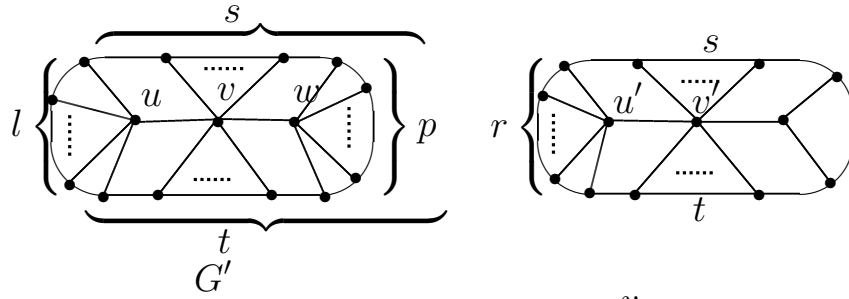
$$\rho(G) \leq 1 + \sqrt{n-6} < 1 + \sqrt{n-5} < \rho(G_2).$$

## 第二步: 内点数 $a = 2$

- 设  $G$  是内点数为 2 的  $n$  阶 Halin 图, 则有  $\rho(G) \leq \rho(G_2)$ .



### 第三步: 内点数 $a = 3$



## 参 考 文 献

- [1] Baofeng Wu, Enli Xiao and Hong Yuan. The spectral radius of trees on  $k$  pendant vertices. *Linear Algebra and its Applications* Vol.395 (2005): 343-349.
- [2] Biggs N L. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- [3] Elingkam, M.N. & Zha Xiaoya, The spectral radius of graphs on surfaces[J], *J.combin.Theory,series B*, 78(2000),45-56.
- [4] 李乔, 冯克勤,论图的最大特征值[J]. *应用数学学报*,(1979), 167-175
- [5] 束金龙, 洪渊, 外平面图和 Halin 图谱半径的上界, *数学年刊* 21A:6(2006)77-82
- [6] Y.Hong, A bounder on the spectral radus of graphs, *Linear Algebra Appl.*108 (1998), 135-139.