平衡二部图过给定点集的圈可扩性

陆　玫

清华大学 数学科学系

mlu@math.tsinghua.edu.cn

Definition

- $G=(V,E)$是阶数为n的图（$n\geq 3$），如果对于任意整数l（$3\leq l\leq n$），图G中存在一个长度为l的圈，则称图G具有泛圈性。

- 如果对于图G的任意一个顶点和任意整数l（$3\leq l\leq n$），图G中存在一个长度为l的圈过该顶点，则称图G具有点泛圈性。

Definition

- $G=(V,E)$是阶数为n的图（$n\geq 3$），如果对于任意整数l（$3\leq l\leq n$），图G中存在一个长度为l的圈，则称图G具有泛圈性。
- 如果对于图G的任意一个顶点和任意整数l（$3\leq l\leq n$），图G中存在一个长度为l的圈过该顶点，则称图G具有点泛圈性。
- 用图G中点不交的路去覆盖图中的点，使得每个顶点在且只在一条路中，所需的最少路的条数称作G的路覆盖数，记作$pc(G)$。为了方便，如果图G是hamilton图，则规定$pc(G)=0$。

- 对于G中的一个点子集$S \subseteq V(G)$，包含S中点的圈长度至少是$|S| + pc(\langle S \rangle)$。

- 称图G具有k-点泛圈性，当且仅当对于G中的每一个包含k（$k \le n$）个点的点子集S和任意l（$|S| + pc(\langle S \rangle) \le l \le n$），图$G$中存在一个长度为$l$的圈过$S$中的所有点。如果这个性质对所有的不小于2的整数$k$成立，则称$G$具有集合泛圈性。

Set Pancyclic

Theorem 1 (Goddard)对于阶数为n，最小度为δ的图G，如果$\delta \geq (n+1)/2$，那么G具有集合泛圈性。.

Theorem 2 (Goddard) 对于阶数为n的图G，如果对于任意一对不相邻的点w，v都满足$d(w)+d(v) \geq (3n-3)/2$，那么G具有集合泛圈性。

- 设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n$的平衡二部图（即$|X|=|Y|=n$）,集合$S\subseteq V(G)$称为图中的一个平衡集，如果满足$|S\cap X|=|S\cap Y|$。
- $\overline{\sigma}(G)=\min\{d(u)+d(v):\ u\in X, v\in Y$且$uv\notin E(G)\}$.

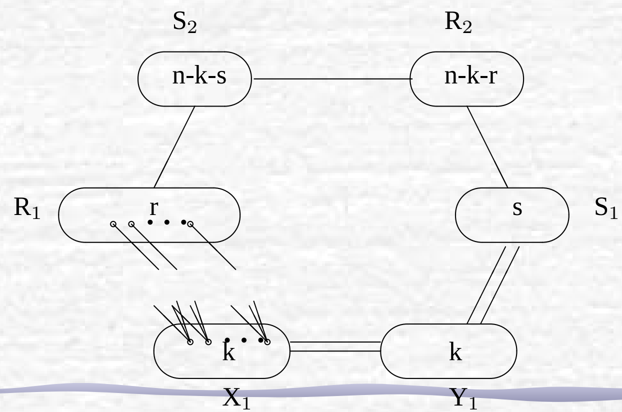
- 设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n$的平衡二部图（即$|X|=|Y|=n$）,集合$S\subseteq V(G)$称为图中的一个平衡集，如果满足$|S\cap X|=|S\cap Y|$。
- $\overline{\sigma}(G)=\min\{d(u)+d(v):\ u\in X, v\in Y$且$uv\notin E(G)\}$.

Theorem A (Li and Lu) *设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n\geq 4$，满足$\overline{\sigma}\geq n+1$的平衡二部图，且$G\notin \mathcal{G}_{2n}$，$S$是$G$中一个平衡集，*
(1) 假设$|S|\geq 4$或者$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)\neq 1$，那么对于任意偶数$l$（$|S|+2pc(\langle S\rangle)\leq l\leq 2n$），图中存在一个长度为$l$的圈过$S$中所有点；
(2) 假设$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)=1$。如果存在一个长度为4的圈过S上的所有点，那么对于从4到$2n$的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点；否则，对于从6到$2n$的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点。

Theorem A (Li and Lu) 设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n\geq 4$，满足$\overline{\sigma}\geq n+1$的平衡二部图，且$G\notin\mathcal{G}_{2n}$，$S$是$G$中一个平衡集，

(1) 假设$|S|\geq 4$或者$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)\neq 1$，那么对于任意偶数$l$（$|S|+2pc(\langle S\rangle)\leq l\leq 2n$），图中存在一个长度为$l$的圈过$S$中所有点；

(2) 假设$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)=1$。如果存在一个长度为4的圈过S上的所有点，那么对于从4到$2n$ 的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点；否则，对于从6到$2n$ 的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点。

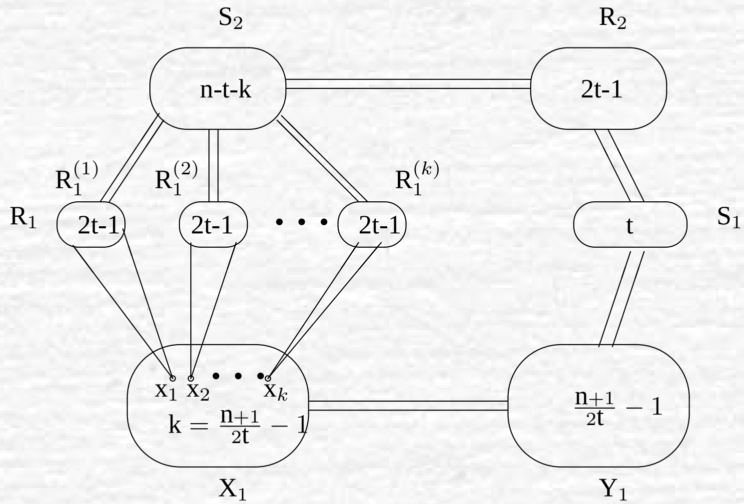


Theorem B:

设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n\geq 4$，满足$\delta\geq\frac{n+1}{2}$的平衡二部图，且当$n\geq 5$，n是奇数时，$G\ncong G_{2n,1}$。S是G中一个平衡集，

(1) 假设$|S|\geq 4$或者$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)\neq 1$，那么对于任意偶数$l$（$|S|+2pc(\langle S\rangle)\leq l\leq 2n$），图中存在一个长度为$l$的圈过$S$中所有点；

(2) 假设$|S|=2$且$pc(\langle S\rangle)=1$。如果存在一个长度为4的圈过S上的所有点，那么对于从4到$2n$的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点；否则，对于从6到$2n$的每一个偶数l，图中存在一个长度为l的圈过S中所有点。

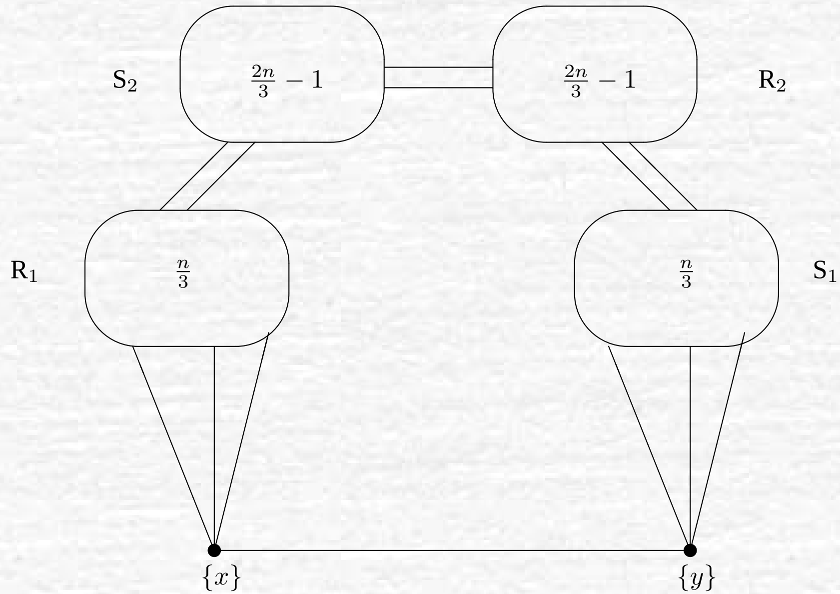


S_2
n-t-k
R_2
2t-1
$R_1^{(1)}$
$R_1^{(2)}$
$R_1^{(k)}$
R_1
2t-1
2t-1
• • •
2t-1
t
S_1
x_1 x_2 • • • x_k
$k = \frac{n+1}{2t} - 1$
$\frac{n+1}{2t} - 1$
X_1
Y_1

Theorem C:

(1) 设$G=(X,Y;E)$是阶数为$2n\geq 4$，满足$\bar{\sigma}\geq\frac{4n+1}{3}$的平衡二部图。$S$是$G$中一个平衡集，则对于任意偶数$l$（$|S|+2pc(\langle S\rangle)\leq l\leq 2n$），图中存在一个该长度的圈过$S$中所有点。

(2) $G=(X,Y;E)$是阶数为$2n\geq 4$，满足$\delta\geq\frac{n+2}{2}$的平衡二部图。S是G中一个平衡集，则对于任意偶数l（$|S|+2pc(\langle S\rangle)\leq l\leq 2n$），图中存在一个该长度的圈过$S$中所有点。



S$_2$
$\frac{2n}{3} - 1$
$\frac{2n}{3} - 1$
R$_2$
R$_1$
$\frac{n}{3}$
$\frac{n}{3}$
S$_1$
$\{x\}$
$\{y\}$

Thank you !