半二面体群的小度数 Cayley 图

王长群　姚俊红

(郑州大学数学系，河南郑州，450052)

引言

给定一个图X,我们用$V(X)$, $E(X)$ 和A $=\mathrm{Aut}(X)$分别表示图X的顶点集, 边集和全自同构群.对于两个顶点u和v ,我们用$u \sim v$表示相邻,用$\{u, v\}$表示连接u和v的边,用(u, v)表示从u到v的弧,用$X_1(v)$表示v的邻点集合,$X_i(v)$表示与v距离是i的点的集合. 我们称图X是点传递的,如果X的自同构群Aut$X$传递的作用在点集合$V(X)$上.

Cayley图由A.Cayley 在1878年提出的,当时是为了解释群的生成元和定义关系.由于它构造的简单性、高度的对称性和品种的多样性,逐渐受到图论学者的重视,成为代数图论中群与图方向的一个重要研究领域.近20年来, 由于计算机的发展,人们发现Cayley图还是构造与设计互联网的很好的数学原型,因而又获得了实际的应用,它的重要性日益增加.研究Cayley图的正规性成为群的GRR表示之外的另一种Cayley图的分类方法.

近几年来,大量学者在Cayley图的正规性方面作了许多重要工作. 在文献[6, 7, 8, 20]中,作者分别确定了素数阶循环群、阶为两个不同奇素数的群、$2p$ (p为素数)阶群的Cayley图的正规性以及所有$2p^2$ (p为素数)阶群的4度1-正则Cayley图的正规性.所有p^3(p为奇素数)阶群的4度连通Cayley图、非交换单群上3度连通边传递图和大多数非交换单群上3度连通图都是正规的([10, 11, 21]); 线性群$PSL(2,q)$上所有连通2度Cayley有向图、交换群上大多数连通小度数Cayley图和具有两个幂零类的p-群(p为素数)上所有连通4度Cayley图也都是正规的([12, 14, 15, 16]).在文献[9, 13, 17, 18, 19]中,作者确定了所有不连通的正规Cayley图、二面体群所有非正规的4度1-正则Cayley图、$2p^2$ (p为素数)阶群的所有2度、3度非正规Cayley有向图以及正则p-群上2度连通非正规Cayley图的分类.

在本篇文章中,我们研究了所有$4m$阶半二面体群3度和4度Cayley图的正规性,这里$m=2^r$且$r>2$. 我们得到了下列结果:

定理 1 设X=Cay(G,S)是群G关于子集S的3度Cayley图,
$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, 且$m=2^r, r>2$,则$X$同构于下列图之一:

(1)Cay(G,S_1),其中$S_1=\{a,a^{-1},b\}$.此时X是G的正规Cayley图,且$A_1\cong Z_2$.

(2)Cay(G,S_2),其中$S_2=\{ab,a^{m+1}b,b\}$.此时X是G的非正规Cayley图.

定理 2 设X=Cay (G,S)是群G关于子集S的4度Cayley图, $G=\langle a,b\mid a^{2m}=b^2=1,a^b=a^{m-1}\rangle$, 且$m=2^r$,$r>2$,则$X$同构于下列图之一:

(1)Cay(G,S_3),其中$S_3=\{a,a^{-1},b,a^m\}$.此时X是G的正规Cayley图,且$A_1\cong Z_2$.

(2)Cay (G,S_4),其中$S_4=\{a,a^{-1},a^ib,a^{m+i}b\}$, i为奇数且$i\in Z_{2m}$. 此时X 是G 的正规Cayley图,且$A_1\cong Z_2^2$.

(3)Cay(G,S_5),其中$S_5=\{ab,a^{m+1}b,b,a^m\}$.此时$X$是$G$的非正规Cayley图.

(4)Cay (G,S_6),其中$S_6=\{ab,a^{m+1}b,b,a^kb\}$, k为偶数且$k\in Z_{2m}$, $k\neq 2\pmod m$.此时X是G的非正规Cayley图.

(5)Cay (G,S_7),其中$S_7=\{a,a^{-1},b,a^kb\}$, k为偶数且$k\in Z_{2m}$.

当$k\neq\pm 2\pmod m$时,X是G的正规Cayley图,且$A_1\cong Z_2$;

当$k\equiv\pm 2\pmod m$时,X是G的非正规Cayley图.

预备知识

定义 1.1 设G是有限群,S为G的不包含单位元1的子集, 我们如下定义群G关于其子集S的Cayley(有向)图X=Cay (G,S):

$$V(X)=G,$$
$$E(X)=\{(g,sg)|g\in G,s\in S\}.$$

定义1.2 Cayley图Cay(G,S)叫做正规的,如果$R(G)\trianglelefteq A$ =Aut(X). 有限群G说有正规的Cayley图,如果G有子集S使得群G关于子集S的Cayley图X =Cay (G,S)是正规的.

Cayley图是一类重要的点传递图,关于Cayley图有以下基本事实:

命题 1([3]) X =Cay (G,S)是群G关于子集S的Cayley（有向）图,则
(1)Aut(X)包含G的右正则表示$R(G)$,因而X是点传递的.
(2)X(作为有向图)连通当且仅当X强连通,当且仅当$G=\langle S\rangle$.
(3)X是无向图当且仅当$S^{-1}=S$,这里我们把一条无向边$\{u,v\}$等同于两条有向边(u,v)和(v,u).

命题 2([3]) 设Aut$(G,S)=\{\alpha\in$Aut$(G)\mid S^{\alpha}=S\}$,则有
(1)$N_A(R(G))=R(G)$Aut(G,S);
(2)$A=R(G)$Aut(G,S)等价于$R(G)\trianglelefteq A$.

命题 3([3]) 设X =Cay (G,S)是群G关于子集S的Cayley图,设A_1是单位元1在A中的点稳定子群, 则X正规当且仅当A_1的每个元素都是群G的自同构.

命题 4([11]) 设X =Cay (G,S)是群G关于子集S的Cayley图,X是正规的,若以下条件成立:
(1)$\forall\varphi\in A_1,\varphi|_S=1_S$,则有$\varphi|_{S^2}=1_{S^2}$,即$\varphi=1_G$;
(2)$\forall\varphi\in A_1$,则存在$\sigma\in$Aut G,使得$\varphi|_S=\sigma|_S$.

定义半二面体群$G=\langle a,b|a^{2m}=b^2=1,a^b=a^{m-1}\rangle$,此处$m$为大于2的偶数. 我们有以下结论:

引理 1.2 设群$G=\langle a,b\mid a^{2^{m+1}}=b^2=1,a^b=a^{2^m-1}\rangle$,此处$m$为大于1的数,则Aut $G\cong Z_{2^m}:(Z_2\times Z_{2^{m-1}})$.

引理 1.3 设$G=\langle a,b\mid a^{2m}=b^2=1,a^b=a^{m-1}\rangle$, $m=2^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$为$m$的素数分解, 其中$p_1,p_2,\ldots p_k$为素数,且$p_1<p_2<\cdots<p_k$,则

(1)当$r_1=2$时,Aut $G\cong\langle\alpha\rangle:(\langle\gamma\rangle\times\langle\eta_2\rangle\times\cdots\times\langle\eta_k\rangle)$;

(2)当$r_1\geq 3$时, Aut $G\cong\langle\alpha\rangle:(\langle\mu\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\eta_2\rangle\times\cdots\langle\eta_k\rangle)$.

引理 1.4 设半二面体群$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$,且$m=2^r, r>2$. S 为G中不包含单位元的子集,并且满足$S=S^{-1}, \langle S\rangle=G$,则以下结论成立:

(i) 若S为G的3元子集,则S在Aut G下的轨道有两个,其代表元分别为:

$S_1=\{a,a^{-1},b\}$

$S_2=\{ab,a^{m+1}b,b\}$

(ii) 若S为G的4元子集,则S在Aut$G$下的轨道有两个,其代表元分别为:

$S_3=\{a,a^{-1},b,a^m\}$

$S_4=\{a,a^{-1},a^ib,a^{m+i}b\}$, i为奇数,且$i\in Z_{2m}$

$S_5=\{ab,a^{m+1}b,b,a^m\}$

$S_6=\{ab,a^{m+1}b,b,a^kb\}$, k为偶数,且$k\in Z_{2m}$

$S_7=\{a,a^{-1},b,a^kb\}$, k为偶数,且$k\in Z_{2m}$.

主要结果

针对引理1.4的几种不同情况,我们得到了下面的结论:

引理 2.1 设X =Cay (G, S_1)是群G的关于子集S_1的Cayley图,
$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_1=\{a,a^{-1},b\}$, 此处$m=2^r, r>2$,
则X =Cay(G, S_1)是正规的Cayley图,且$A_1\cong Z_2$.

引理 2.2 设X =Cay (G, S_2)是群G的关于子集S_2的Cayley图,
$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_2=\{ab,a^{m+1}b,b\}$, 此处$m=2^r$且
$r>2$, 则X =Cay (G, S_2)是非正规的Cayley图.

引理 2.3 设X =Cay (G, S_3)是群G的关于子集S_3的Cayley图,
$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_3=\{a,a^{-1},a^m,b\}$, 此处$m=2^r$ 且
$r>2$, 则X =Cay(G, S_3)是正规Cayley图,且$A_1\cong Z_2$.

引理 2.4 设$X=$Cay(G,S_4)是群G的关于子集S_4的Cayley图, $G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_4=\{a,a^{-1},a^ib,a^{m+i}b\}$, 此处$m=2^r$且$r>2$, i为奇数, 则$X=$Cay(G,S_4)是正规的Cayley图,且$A_1\cong Z_2^2$.

引理 2.5 设$X=$Cay(G,S_5)是群G的关于子集S_5的Cayley图, $G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_5=\{ab,a^{m+1}b,a^m,b\}$, 此处$m=2^r$且$r>2$, 则$X=$Cay (G,S_5)是非正规的Cayley图.

引理 2.6 设$X=$Cay(G,S_6)是群G的关于子集S_6的Cayley图, $G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_6=\{ab,a^{m+1}b,a^kb,b\}$,此处$m=2^r$且$r>2$, k为偶数且$k\in Z_{2m}$, $k\neq \pm 2(\mod m)$, $\frac{m}{2}(\mod m)$, m, $\frac{m+2}{3}$, 则$X=$Cay(G,S_6)是非正规的Cayley图.

注: 通过对引理2.6的特殊情况的考虑,再结合引理2.6可知:
当$k\equiv 2(\mod m)$时,$X=$Cay(G,S_6)是正规的Cayley图;
当$k\neq 2(\mod m)$时,$X=$Cay(G,S_6)是非正规的Cayley图.

引理 2.7 设$X=$Cay(G,S_7)是群G的关于子集S_7的Cayley图，$G=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1, a^b=a^{m-1}\rangle$, $S_7=\{a,a^{-1},a^kb,b\}$,此处$m=2^r$且$r>2$, k为偶数, 且$k\in Z_{2m}$, $k\neq m$, $\pm 2(\mod m)$, $\pm 4(\mod m)$, $\frac{m}{2}(\mod m)$则$X=$Cay(G,S_7)是正规的Cayley图,且$A_1\cong Z_2$.

注: 通过对引理2.7的特殊情况的考虑,再结合引理2.7可知:

当$k\equiv\pm 2(\mod m)$时,$X=$Cay (G,S_7)是非正规的Cayley图;

当$k\neq\pm 2(\mod m)$时,$X=$Cay (G,S_7)是正规的Cayley图.

谢　谢