$\Delta \geq 6$的图的星边色数的一个上界

A Bound on the Star Chromatic Index of Graphs With $\Delta \geq 6$

邓 凯

西北师范大学
数学与信息科学学院

主要内容

基础知识

定义1($Grübaum1973$)

图的星着色：无向图G的星着色是G的一个正常点着色，并且满足G中任何一个长为3的路不是2-着色的。

定义2

图的星色数：无向图G的星色数用$\chi_s(G)$表示，是最小的正整数k使得G有k种颜色的星着色。

基础知识

定义1(Grübaum1973)

图的星着色：无向图G的星着色是G的一个正常点着色，并且满足G中任何一个长为3的路不是2-着色的。

定义2

图的星色数：无向图G的星色数用$\chi_s(G)$表示，是最小的正整数k使得G有k种颜色的星着色。

问题背景

2004年Guillaume Fertin,André Raspaud,和Bruce Reed 证明了:

定理

设图G的最大度为Δ，则$\chi_s(G) \leq \lceil 20\Delta^{\frac{3}{2}} \rceil$。

问题背景

2004年Guillaume Fertin,André Raspaud,和Bruce Reed 证明了:

定理

设图G的最大度为Δ，则$\chi_s(G) \leq \lceil 20\Delta^{\frac{3}{2}} \rceil$。

星边着色

定义3

图的星边着色：无向图G的星边着色是G的一个正常边着色，并且满足G中任何一个长为4的路不是2-边着色的。

定义4

图的星边色数：无向图G的星边色数用$\chi'_s(G)$表示，是最小的正整数k使得G有k种颜色的星边着色。

我们研究了图的星边色数并得到一个上界，利用我们的结果和图与线图的关系对一类线图的星色数的上界做了改进。

星边着色

定义3

图的星边着色：无向图G的星边着色是G的一个正常边着色，并且满足G中任何一个长为4的路不是2-边着色的。

定义4

图的星边色数：无向图G的星边色数用$\chi'_s(G)$表示，是最小的正整数k使得G有k种颜色的星边着色。

我们研究了图的星边色数并得到一个上界，利用我们的结果和图与线图的关系对一类线图的星色数的上界做了改进。

星边着色

定义3

图的星边着色：无向图G的星边着色是G的一个正常边着色，并且满足G中任何一个长为4的路不是2-边着色的。

定义4

图的星边色数：无向图G的星边色数用$\chi'_s(G)$表示，是最小的正整数k使得G有k种颜色的星边着色。

我们研究了图的星边色数并得到一个上界，利用我们的结果和图与线图的关系对一类线图的星色数的上界做了改进。

主要结论

定理1

设图G的最大度$\Delta \geq 6$，则$\chi'_s(G) \leq \lceil 16(\Delta - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

推论1

如果线图G的最大度$\Delta \geq 10$，则$\chi_s(G) \leq \lceil 16(\Delta - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

我们将应用概率方法进行证明。

主要结论

定理1

设图G的最大度$\Delta \geq 6$，则$\chi'_s(G) \leq \lceil 16(\Delta - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

推论1

如果线图G的最大度$\Delta \geq 10$，则$\chi_s(G) \leq \lceil 16(\Delta - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

我们将应用概率方法进行证明。

主要结论

定理1

设图G的最大度$\Delta \geq 6$，则$\chi'_s(G) \leq \lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

推论1

如果线图G的最大度$\Delta \geq 10$，则$\chi_s(G) \leq \lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}} \rceil$。

我们将应用概率方法进行证明。

Lovász 局部引理

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是任意一个概率空间中的事件。图$H = (V, E)$以$\{1, 2, \ldots, n\}$为顶点，如果事件A_i和事件A_j是相互关联的事件，则在H中对应顶点i, j之间连边。如果存在实数$0 \leq y_i < 1$，满足对一切i有：

$$Pr(A_i) \leq y_i \prod_{\{i,j\} \in E} (1 - y_j)$$

则：

$$Pr(\bigcap \overline{A_i}) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - y_i) > 0。$$

为了利用Lov$\acute{a}$sz 局部引理，需要构造特殊图H
首先设$x = \lceil 16(\Delta - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$，做图$G$的边染色映射:

$$c : E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, x\}$$

染色过程是独立随机进行的,对$e \in E(G)$用$c(e)$表示e上所染颜色。

定义两类坏事件

1. 类型I：对G中任意一对关联边e,f，用$A_{e,f}$表示事件$c(e)=c(f)$。
2. 类型II：对G中任意一条长为4的路$uvwxy$，其中$uv=e,vw=f,wx=g,xy=h$ 用$B_{e,f,g,h}$表示事件$c(e)=c(g),c(f)=c(h)$。

若类型I和类型II中事件均不发生则c就是G的一个星边着色。

定义两类坏事件

1. 类型I：对G中任意一对关联边e,f，用$A_{e,f}$ 表示事件$c(e) = c(f)$。
2. 类型II：对G中任意一条长为4的路$uvwxy$，其中$uv = e, vw = f, wx = g, xy = h$ 用$B_{e,f,g,h}$ 表示事件$c(e) = c(g), c(f) = c(h)$。

若类型I和类型II中事件均不发生则c就是G的一个星边着色。

定义两类坏事件

1. 类型I：对G中任意一对关联边e,f，用$A_{e,f}$表示事件$c(e)=c(f)$。
2. 类型II：对G中任意一条长为4的路$uvwxy$，其中$uv=e,vw=f,wx=g,xy=h$ 用$B_{e,f,g,h}$表示事件$c(e)=c(g),c(f)=c(h)$。

若类型I和类型II中事件均不发生则c就是G的一个星边着色。

定义两类坏事件

1. 类型I：对G中任意一对关联边e,f，用$A_{e,f}$表示事件$c(e)=c(f)$。
2. 类型II：对G中任意一条长为4的路$uvwxy$，其中$uv=e, vw=f, wx=g, xy=h$ 用$B_{e,f,g,h}$表示事件$c(e)=c(g), c(f)=c(h)$。

若类型I和类型II中事件均不发生则c就是G的一个星边着色。

构造H

设图H以类型I和类型II中的所有事件为顶点，两个顶点相邻当且仅当对应事件相互影响，称H的一个顶点是类型$i \in \{I, II\}$顶点，如果此顶点对应的事件在类型i中。

几个引理

引理1

(1)对类型I中的任一个事件A有$Pr(A)=\frac{1}{x}$。
(2)对类型II中的任一个事件B有$Pr(B)=\frac{1}{x^2}$。

引理2

设G最大度为Δ，$e\in E(G)$,则
(1)e最多与G中$2(\Delta-1)$边关联。
(2)e最多属于G中$2(\Delta-1)^3$条长为4 的路。

几个引理

引理1

(1)对类型I中的任一个事件A有$Pr(A)=\frac{1}{x}$。
(2)对类型II中的任一个事件B有$Pr(B)=\frac{1}{x^2}$。

引理2

设G最大度为Δ，$e\in E(G)$,则
(1)e最多与G中$2(\Delta-1)$边关联。
(2)e最多属于G中$2(\Delta-1)^3$条长为4 的路。

几个引理

引理3

对$i,j \in \{I,II\}$，用(i,j)表示H中与一个类型i顶点相关的类型j顶点的个数，则

$$(I,I) \leq 4(\Delta-1), (I,II) \leq 4(\Delta-1)^3;$$

$$(II,I) \leq 8(\Delta-1), (II,II) \leq 8(\Delta-1)^3.$$

选择y_i

为利用Lováz局部引理，现在只剩下选择y_i，这里要求$0 \le y_i < 1$。我们选择$y_i = \frac{2}{x^i}, i \in \{1, 2\}$
即所有类型I事件都对应$\frac{2}{x}$,所有类型II事件都对应$\frac{2}{x^2}$。

定理1的证明

利用Lováz局部引理和前面介绍的几个引理，要证明定理1成立只需要证明下面两个不等式成立：

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4(\Delta-1)}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{4(\Delta-1)^3}$$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{8(\Delta-1)}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{8(\Delta-1)^3}$$

注意到如果第二个不等式成立，那么第一个不等式也成立。

定理1的证明

利用Lováz局部引理和前面介绍的几个引理，要证明定理1成立只需要证明下面两个不等式成立:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4(\Delta-1)}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{4(\Delta-1)^3}$$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{8(\Delta-1)}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^{8(\Delta-1)^3}$$

注意到如果第二个不等式成立，那么第一个不等式也成立。

定理1的证明

只需证明:

$$(1-\frac{2}{x})^{8(\Delta-1)}(1-\frac{2}{x^2})^{8(\Delta-1)^3}\geq\frac{1}{2}$$

这里:

$$(1-\frac{2}{x})^{8(\Delta-1)}\geq 1-\frac{16(\Delta-1)}{x},(1-\frac{2}{x^2})^{8(\Delta-1)^3}\geq 1-\frac{16(\Delta-1)^3}{x^2}$$

定理1的证明

$$(1-\frac{2}{x})^{8(\Delta-1)}(1-\frac{2}{x^2})^{8(\Delta-1)^3} \geq (1-\frac{16(\Delta-1)}{x})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{x^2})$$

当$x=\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil$且$\Delta \geq 6$时

$$(1-\frac{16(\Delta-1)}{\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil^2}) \geq$$
$$(1-\frac{16(\Delta-1)}{16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{(16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}})^2}) = \frac{15}{16}(1-\frac{1}{\sqrt{\Delta-1}}) > \frac{1}{2}$$

说明坏事件不发生的概率为正，因此存在c是G的星边着色利用图与线图的关系立刻有推论1成立

定理1的证明

$$(1-\frac{2}{x})^{8(\Delta-1)}(1-\frac{2}{x^2})^{8(\Delta-1)^3} \geq (1-\frac{16(\Delta-1)}{x})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{x^2})$$

当$x=\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil$且$\Delta\geq 6$时

$$(1-\frac{16(\Delta-1)}{\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{\lceil 16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}\rceil^2}) \geq$$
$$(1-\frac{16(\Delta-1)}{16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}}})(1-\frac{16(\Delta-1)^3}{(16(\Delta-1)^{\frac{3}{2}})^2}) = \frac{15}{16}(1-\frac{1}{\sqrt{\Delta-1}}) > \frac{1}{2}$$

说明坏事件不发生的概率为正，因此存在c是G的星边着色利用图与线图的关系立刻有推论1成立

致谢

谢谢大家!

欢迎批评指正