Linked Graphs with Restricted Lengths

Guantao Chen[a,b] **Shuhong Gao**[c] **Zhiquan Hu**[a]

[a]**Faculty of Math. and Stat., Central China Normal University**
Wuhan 430079, PRC

[b]**Dept. of Math. and Stat., Georgia State University, Atlanta, GA 30303**

[c] **Dept. of Math. Sciences, Clemson University, Clemson, SC29634**

定义

k一联图:　设$|G| \geq 2k$，如果对任何$2k$个不同点$x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$，$G$中有$k$条点不交的路$P_1, P_2, \ldots, P_k$，使得$P_i$连接$x_i$ 和y_i，则图G为k一联图.

模$(m_1, m_2, \ldots, m_k)$一联图:　如果上述定义中的路还满足

$$l(P_i) \equiv d_i \ \ modulo \ m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

其中$d_1, d_2, \ldots, d_k$是任意k个给定的整数，则称G为模$(m_1, m_2, \ldots, m_k)$一联图.

特别当$m_1 = \cdots = m_k = 2$时，称G为奇偶k一联图 (k-pariety-linked graph).

研究背景

1967年，著名图论专家W. Mader证明存在一个函数$h(r)$ 使每一个平均度至少为$h(r)$的图都包含K_r 作为其拓扑因子. 利用该结果，H. A. Jung 以及D. G. Larman 和P. Mani独立证明了存在函数$f(k)$使每一个$f(k)$-连通图都是k-linked 图. 1996年，著名数学家B. Bollobàs 和A. Thomason发现可用一个满足条件$2\delta(H) \geq |H| + 4k - 2$ 的稠密图因子H代替拓扑图因子K_{3k}，证明了每一个$22k$-连通图都是k-linked 图. 2005年，著名数学家R. Thomas 和P. Wollan将该结果改进为每一个$10k$-连通图都是k-linked 图.

定理1　(R. Thomas, P. Wollan，2005)

设G是边数至少为$5k|V(G)|$的$2k$一连通图，则G为k一联图.

与此相关，图的模linkage也一直是众多著名学者关注的问题.

定理2 (Bollobás, London Math. Soc. 1977)

对任何自然数m和d，每一个边数至少为$\frac{(m+1)^m-1}{m}\cdot|G|$ 的图包含一个在模m下长度为$2d$的圈.

定理3 (C. Thomassen, JGT 1983)

在条件$\delta(G)\geq 4d(m+1)$下，定理2成立.

定理4 (C. Thomassen, JGT 1983)

对于任意自然数k和p，总存在着一个自然数$\gamma(k,p)$使得任意的$\gamma(k,p)$一连通图G具有如下性质：对任意由自然数组成的k元组(m_1,m_2,$\cdots$, m_k)(其中每个m_i为奇数且小于p)，G为模$(m_1,m_2,\ldots,m_k)$一联图.

定理4的证明方法：图的分解

定理4的证明中给出的$\gamma(k,p)$的界：

$$\underbrace{\xi 2^{\xi}\cdot 2^{\xi 2^{\xi}}\cdot 2^{2^{\xi 2^{\xi}}}\cdots}_{s^2(2t+1)^{2t+1}-s^2\text{ 次}}$$

其中s是一个充分大于k和p的整数，$t=p!, \xi:=\xi(s^2(2t+1)^t)$满足：每一个最小次至少为$\xi$的图包含$K_{s^2(2t+1)^t, s^2(2t+1)^t}$的满足奇偶路长条件的细分.

我们证明线性连通度可保证上述定理中结论成立.

定理A　设$m_1, m_2, \dots, m_k$为奇数，则每一个$\max\{14(m_1+m_2+\cdots+m_k)-4k,\ 6(m_1+m_2+\cdots+m_k)-4k+36\}$-连通图都是模$(m_1, m_2, \dots, m_k)$-联图.

完全二部图表明上述定理中m_i均为奇数的条件是必要的.

定义：两分数

$$bi(G) = \min\{|X|:\ \ X \subseteq V(G), G - X \text{ 为两分图}\}$$

定理5　(Thomassen, Combinatorica 2001)

对于任意正整数k，每一个两分数至少为$4k-3$的$2^{3^{27k}}$−连通图都是奇偶−k−联图.

注：定理5中关于两分数的界$4k-3$是最好可能的, Thomassen猜想在线性连通度条件下定理5依然成立.

定理6　(Kawarabayashi, Reed 2005)

对于任意正整数k，每一个两分数至少为$4k-3$的$50k$−连通图都是奇偶−k−联图

定理B 设$m_1, m_2, \ldots, m_k$为k个自然数，其中$m_i(i \in [\ell+1, k])$为奇数. 如果G为$45(m_1+\cdots+m_k)$-连通图并且$bi(G) \geq 2k+2\ell-3+\delta(m_1, \ldots, m_\ell)$, 则$G$为模$(m_1', m_2', \ldots, m_k')$-联图，其中

$$m_i' := \begin{cases} 2m_i, & \text{如果} 1 \leq i \leq \ell \\ m_i, & \text{如果} \ell+1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

$$\delta(m_1, \ldots, m_\ell) := \begin{cases} 0, & \text{如果} \min\{m_1, \ldots, m_\ell\} = 1 \\ 1, & \text{如果} \min\{m_1, \ldots, m_\ell\} \geq 2. \end{cases}$$

推论1 对任意正整数k，每一个两分数至少为$4k-3$的$45k$一连通图都是奇偶一k一联图.

显然，推论1改进了定理5和定理6.

注： 定理B中条件$bi(G)\ge 2k+2\ell-3+\delta(m_1,\ldots,m_\ell)$ 是最好可能的:

(1) 设$\min\{m_1,\ldots,m_\ell\}\ge 2$. 考虑

$$G := (K_{2k}\cup\overline{K_t})+(K_{2\ell-1}\cup\overline{K_t}),$$

易见$bi(G)=2k+2\ell-3$. 设K_{2k}的顶点集合为$X:=\{x_1,y_1,\ldots,x_k,y_k\}$，则$G$中不存在点不交的路$P_1[x_1,y_1]$, $P_2[x_2,y_2]$, ..., $P_k[x_k,y_k]$ 使

$$\ell(P_i)\equiv 3 \bmod 2m_i,\quad \forall\, i\in[1,\ell].$$

所以G 不是$(m_1',m_2',\ldots,m_k')$-联图.

(2) 设$\min\{m_1,\ldots,m_\ell\}=1$. 考虑

$$H := G-\{x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ky_k\}.$$

易见$bi(H)=2k+2\ell-4$, 且H中不存在点不交的路$P_1[x_1,y_1]$, ..., $P_k[x_k,y_k]$ 使

$$\ell(P_i)\equiv 1 \bmod 2m_i,\quad \forall\, i\in[1,\ell].$$

所以H 不是$(m_1',m_2',\ldots,m_k')$-联图.

定理的证明

证明的基本思想:

(i) 用一类特殊的路结构代替定理4证明中出现的完全两分图的细分

(ii) 用模m的少量剩余类表示其所有剩余类

引理1 (Erdős and Heilbronn)　设p 是素数，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 在模p下互不相同且不等于0. 如果$k \geq 3\sqrt{6p}$，则

$$\mathbb{Z}/(p) = \{0, a_1\} + \{0, a_2\} + \cdots + \{0, a_k\} \mod p$$

引理2 (Olson)　设p 是素数，$a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ 在模p下非零，则

$$\mathbb{Z}/(p) = \{0, a_1\} + \{0, a_2\} + \cdots + \{0, a_{p-1}\} \mod p$$

引理3　设$m \geq 2$ 为正整数，$A_1, ..., A_{m-1}$是$\mathbb{Z}$的含0元的子集. 如果对m的每一个素因子p 和所有的$i \in [1, m-1]$ 都存在元素$a_i \in A_i$ 使$p \nmid a_i$, 则

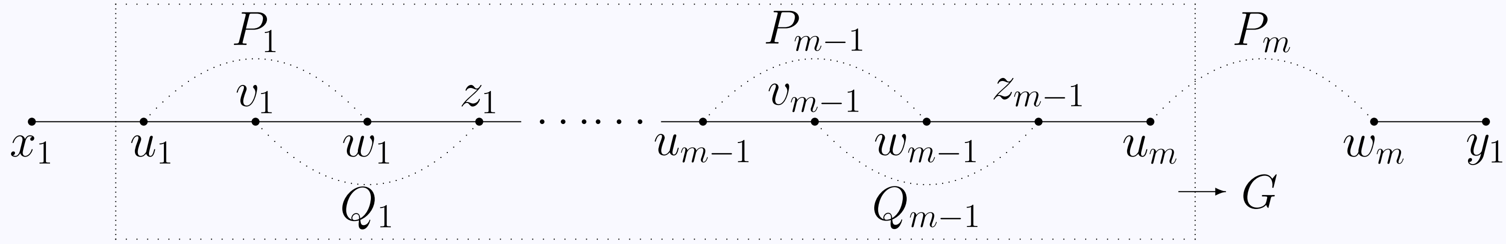
$$\mathbb{Z}/(m) = A_1 + \cdots + A_{m-1} \mod m.$$

引理4　设$m \geq 3$为奇数，$R := u_1v_1w_1z_1u_2v_2w_2z_2\cdots u_{m-1}v_{m-1}w_{m-1}z_{m-1}u_m$为$G$中的一条路. 如果存在$G$中点不交的路$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}$使得对所有的$i = 1, 2, \ldots, m-1$都有

$$V(P_i) \cap V(R) = \{u_i, w_i\},\ V(Q_i) \cap V(R) = \{v_i, z_i\}$$

则对任何整数d存在G中连接u_1和u_m的路R_d使得$\ell(R_d) \equiv d \bmod m$.

注：根据引理4，当m为奇数时，为了得到连接x_1和y_1的在模m下长度为d的路, 我们只需要$(2m-1)$-**linkage**. 由此得到定理A的证明.



引理5　设$m \geq 2$为偶数，G为两分图，则在引理2的条件下存在G中连接u_1和u_m的路R_d使得$\ell(R_d) \equiv 2d \bmod m$.

注：根据引理5，当m为偶数时，我们可采用下述方式得到连接x_1和y_1的在模m下长度为d的路:

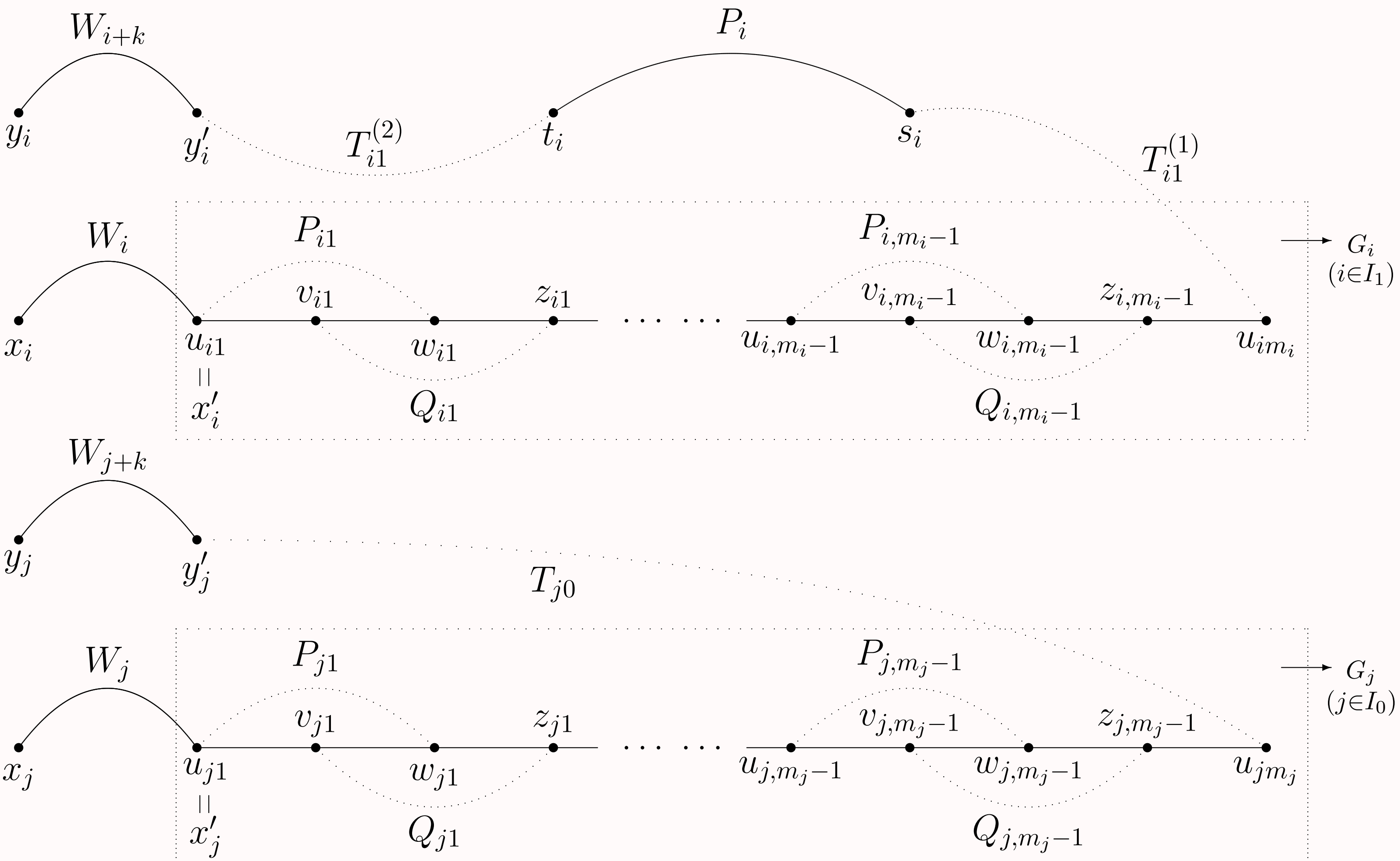
(i) 找一个linkage足够高的两分图K；

(ii) 找连接$\{x_1, y_1\}$和K的独立路W_1, W_1'，以及与W_1, W_1'内部点不交的奇偶校正路(Parity-breaking-Path)P_1;

(iii) 利用奇偶校正路选择一条与d奇偶性相同的(x_1, y_1)-路R;

(iv) 利用引理5得到一条在模m下长度为d的(x_1, y_1)-路.

奇偶校正路:　对于两分图K，如果P与K内部点不交，且$K \cup P$含奇圈，则称P为G关于K的一条奇偶校正路.


W_{i+k}
P_i
y_i
y_i'
$T_{i1}^{(2)}$
t_i
s_i
$T_{i1}^{(1)}$
W_i
P_{i1}
P_{i,m_i-1}
G_i
$(i \in I_1)$
x_i
u_{i1}
v_{i1}
w_{i1}
z_{i1}
u_{i,m_i-1}
v_{i,m_i-1}
w_{i,m_i-1}
z_{i,m_i-1}
u_{im_i}
$\|$
x_i'
Q_{i1}
Q_{i,m_i-1}
W_{j+k}
y_j
y_j'
T_{j0}
W_j
P_{j1}
P_{j,m_j-1}
G_j
$(j \in I_0)$
x_j
u_{j1}
v_{j1}
w_{j1}
z_{j1}
u_{j,m_j-1}
v_{j,m_j-1}
w_{j,m_j-1}
z_{j,m_j-1}
u_{jm_j}
$\|$
x_j'
Q_{j1}
Q_{j,m_j-1}

谢谢！